ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ «ПАРУСА НАДЕЖДЫ»
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2022-2023 УЧ. ГОД
Краткие решения к заданиям очного тура
9-10 классы

Вариант 1

Задание 1.
Ясно, что каждый школьник и школьница ежедневно делали столько поклонов, сколько было детей в школе. Значит, все дети вместе ежедневно делали столько поклонов, сколько будет, если умножить их общее число само на себя. Итак, мы знаем, что 900 – это число детей, умноженное само на себя. Какое же число, умноженное само на себя, составит 900? Очевидно 30. А так как девочек было вдвое больше, чем мальчиков, то из детей было 20 девочек и 10 мальчиков.

Ответ: 20 девочек и 10 мальчиков

Задание 2.
Так как

$(с - а)^3 = -(а - с)^3$ и $а - с = (в - с) + (а - в)$, то $(в - с)^3 - [(в - с) + (а - в)]^3 + (а - -в)^3 = -3(в - с)^2(а - в) - 3(в - с)(а - в)^2 = -3(в - с)(а - с)(а - в) = 3(в - а)(с - -в)(с - а)$.

Ответ: $3(в - а)(с - в)(с - а)$

Задание 3.
Так как $\frac{а+в}{2} \geq \sqrt{ав}$, $2x + \frac{18\pi^2}{x} \geq 2\sqrt{\frac{2x \cdot 18\pi^2}{x}} = 12\pi$. Но с другой стороны, при $x = 3\pi < 10$, $mincosx = -1$, поэтому $\min f(x)\Big|_{x = 3\pi} = 12\pi - 1$

Ответ: $12\pi - 1$

Задание 4.

Имеем $\sqrt{10+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15}} = \sqrt{2+3+5+2\sqrt{2*3}+2\sqrt{2*5}+2\sqrt{3*5}}=$ $=\sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})^2}=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$. С другой стороны, имеем $\sqrt{2}>1{,}4;\ \sqrt{3}>$ $>1{,}7;\sqrt{5}>2{,}2$, поэтому $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}>1{,}4+1{,}7+2{,}2=5{,}3$. Следовательно, первое число (слева) больше второго (справа)

Ответ: первое число больше

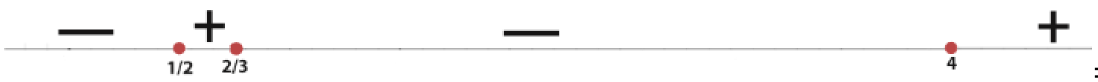
Задание 5.

$(y^2)^2<(x+1)^2=y^4+y^2+1\leq(y^2+1)^2$. Отсюда $y=0, x=0$ или $x=-2$

Ответ: (0;0), (-2;0)

Задание 6.

Если данное неравенство умножить на положительную функцию $\frac{|x-1|+|x|}{|2x-3|+|x+1|}$, то получим равносильное неравенство: $\frac{(x-1)^2-x^2}{(2x-3)^2-(x+1)^2}\leq 0$. Отсюда $\frac{(x-1-x)(x-1+x)}{(2x-3-x-1)(2x-3+x+1)}\leq 0$. Тогда $\frac{2x-1}{(x-4)(3x-2)}\geq 0$. Решаем методом интервалов:



=>

$\frac{1}{2}\leq x<\frac{2}{3}; x>4$. (т.к. ОДЗ:$x\neq 4, x\neq\frac{2}{3}$)

Ответ: $[\frac{1}{2},\frac{2}{3})\cup(4,+\infty)$

Задание 7.

С помощью группировки данное уравнение можно представить в виде: $(sinx-3\sin 2x)(\sin^3 x-cos2x-2)=0$. Значит равенство нулю будет, если $\left[\begin{array}{l}\sin x-3\sin 2x=0\\ \sin^2 x-\cos 2x-2=0\end{array}\right.$. Из первого уравнения системы получим (sin$x$(1- -6cos$x$)=0 $<=>\left[\begin{array}{c}x=k\pi\\ x=\pm\arccos\frac{1}{6}+2\pi m\end{array}\right.$. Второе уравнение системы имеет решение. Когда $\left\{\begin{array}{l}\sin^2 x=1\\ \cos 2x=-1\end{array}\right.$ $<=>\cos 2x=-1, x=\frac{\pi}{2}+\pi s$

Ответ: $k\pi, \pm\arccos\frac{1}{6}+2\pi m, \frac{\pi}{2}+\pi s$

Задание 8.

Из ∠АВС=2 ∠ДВЕ следует, что ∠ДВЕ=∠СВД+∠АВЕ. Возьмем такую точку Р на стороне ДЕ, что ∠РВЕ=∠АВЕ. Тогда ∠РВД=∠СВД. Треугольник АВЕ равнобедренный, так что углы АВЕ и АЕВ равны. Из равенства углов АЕВ и РВЕ следует, что ВР∥АЕ (По обратной теореме о внутренних накрест лежащих углах). Аналогично СД∥ВР и мы доказали, что АЕ и СД параллельны. Следовательно, АЕДС-параллелограмм и АС=ДЕ. Значит треугольник АВС – равносторонний и ∠АВС=60°

Ответ: 60°

ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ «ПАРУСА НАДЕЖДЫ»
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2022-2023 УЧ. ГОД
Краткие решения к заданиям очного тура
9-10 классы

Вариант 2

Задание 1.

Ответ: $123-45-67+89=100$

Задание 2.

Пусть

$x^5+x+1=(x^2+ax+1)\cdot(x^3+вx^2+1)=x^5+вx^4+x^2+ax^4+aвx^3+ax+x^3+вx^2+1=x^5+(a+в)\cdot x^4+$

$+(a\cdot в+1)x^3+(в+1)\cdot x^2+ax+1$. Отсюда имеем: $\begin{cases} a+в=0 \\ aв+1=0 \\ в+1=0 \\ a=1 \end{cases} => \begin{matrix} в=-1 \\ a=1 \end{matrix}$

Ответ: $(x^2+x+1)(x^3-x^2+1)$

Задание 3.

$1{,}73<\sqrt{3}<1{,}74$, то угол $\alpha=\sqrt{3}$ радиан будет лежать в промежутке

$57{,}3°\cdot 1{,}73<\alpha<57{,}3°\cdot 1{,}74$, то есть $99{,}13°<\ \alpha<99{,}7°$. То есть угол α лежит во второй четверти, где $\cos\alpha$ отрицательный.

Ответ: меньше нуля.

Задание 4.

$\sqrt{15+2\sqrt{15}+2\sqrt{21}+2\sqrt{35}}=\sqrt{15+2\sqrt{3\cdot 5}+2\sqrt{3\cdot 7}+2\sqrt{5\cdot 7}}=$

$=\sqrt{3\cdot 5+7+2\sqrt{3\cdot 5}+2\sqrt{3\cdot 7}+2\sqrt{5*7}}=\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7})^2}=$

$=\sqrt{3}+\sqrt{5}++\sqrt{7}$. Имеем: $\sqrt{3}>1{,}7$; $\sqrt{5}>2{,}2$; $\sqrt{7}>2{,}6$, поэтому $\sqrt{3}+$

$+\sqrt{5}++\sqrt{7}>1{,}7++2{,}2+2{,}6=6{,}5$. Следовательно, первое число (слева) больше второго числа (справа).

Ответ: первое число больше.

Задание 5.

$(x+2)^3=x^3+6x^2+12x+8<x^3+8x^2+42x+27<x^3+12x^2+48x+64=(x+4)^3$, поэтому $y=x+3$. Отсюда, подставляя в уравнение $y=x+3$, получим:

$(x+3)^3=x^3+9x^2+27x+27=x^3+8x^2+42x+27 => x^2=15x$, т.е. $x==15$ и тогда

$y=18$.

Ответ: (15,18)

Задание 6.

Имеем: $x^2-2x+3<\sqrt{4-x^2}$. Левая часть неравенства≥ 2, правая часть неравенства≤ 2. Так как при $x=1$ $(x-1)^2+2=2$, а $\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$, то неравенство невозможно.

Ответ: ø

Задание 7.

ОДЗ $\cos x\neq 0, \cos 3x\neq 0$

$\frac{\sin 3x}{\cos 3x}-\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\sin 2x}{\cos x\cos 3x}=2\sin 2x\,(2\cos 2x-1) => \sin 2x=0$, но $\cos x\neq 0$, поэтому решение будет $\sin x=0$, т.е. $x=\kappa\pi$. Сократив на $\sin 2x$, получим уравнение: $\frac{1}{\frac{1}{2}(\cos 2x+\cos 4x)}=2(\cos 2x-1)\cdot\frac{1}{\cos 2x+\cos 4x}=2(\cos 2x-1)$, Далее

$\frac{1}{\cos 2x+2\cos^2 2x-1}=2\cos 2x-1$, если $\cos 2x=a$, то $(2a-1)(a+2a^2-1)==1 => 4a^3-3a=0$, т.е. $\cos 2x=0$ или $\cos^2 2x=\frac{3}{4}, \frac{1+\cos 4x}{2}=\frac{3}{4}, \cos 4x==\frac{1}{2}$ Следовательно, $2x=\frac{\pi}{2}+\pi m, x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi m}{2}$ или $4x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, x=\pm\frac{\pi}{12}++\frac{\pi n}{2}$

Ответ: $x_1 = k\pi, x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}, x_3 = \pm\frac{\pi}{12} + \; + \frac{\pi n}{2} \quad k,m,n \in Z$

Задание 8.

Пусть ABC данный треугольник, отрезок BE разбивает треугольник ABC на два подобных треугольника ABE и BEC. Коэффициент подобия равен $\sqrt{3}$.

Решение:

Раз треугольник ABE подобен BEC один из углов треугольника BEC равен углу AEB, то ∠BEC+∠ECB+∠CBE=π, отсюда следует, что ∠EBC+∠BCE= $\pi -$ - ∠BEC=∠AEB. Тем самым ∠AEB не может равняться ни одному из углов EBC или BCE, поскольку он равен их сумме. Значит, он равен своему смежному ∠BCE и, следовательно, является прямым углом. Далее определим, какому из углов равняется угол BAE. Если ∠BAE=∠BCE, то треугольник ABE и BCE равны по катету и острому углу, т.е. не могут иметь коэффициент подобия $\sqrt{3}$. Этим доказано, что ∠BAE=∠EBC и ∠BCE=ABE, откуда ∠ABC=∠ABE+∠BAE=$\frac{\pi}{2}$. Кроме того, $\mathrm{ctg} A = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \mathrm{A} = \frac{\pi}{3}$.

Ответ: $\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{6}$